

一般化されたパートン分布関数

— 理論の立場から —

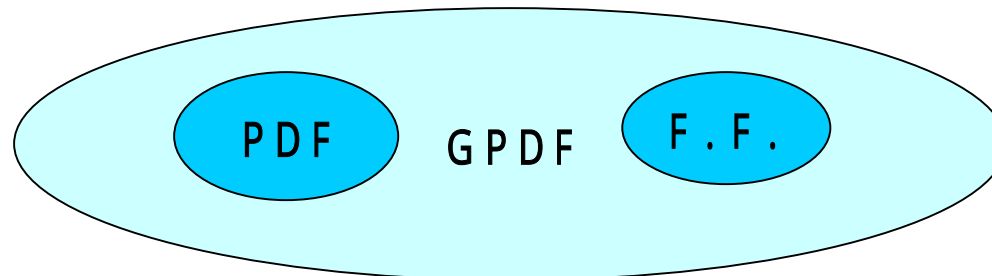
1. 初めに

一般化パートン分布関数 (GPDF) とは？

レプトンと核子の

- Deeply Virtual Compton Scattering (DVCS)
- Deeply Virtual Meson Production (DVMP)

等を通じて測定可能な、Feynmanのパートン分布 (PDF) と電磁形状因子 (FF) の情報を統合、内包する量



どこが面白いのか？

- 核子中のクォークが運ぶ**軌道角運動量**を純粹に**実験的**に決定する手段を提供する。

“**核子スピンの謎**”を解くための最も直接的で強力な道具

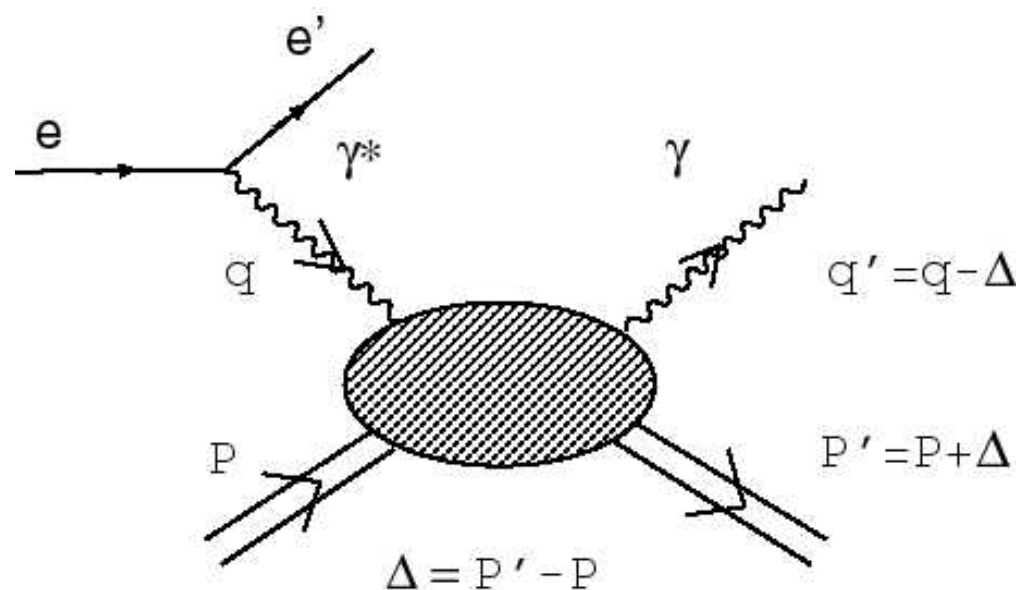
- 核子の**内部構造** (**クォーク・グルオン構造**) の最も詳しい情報を与える物理量である。

核子構造の量子力学的位相空間 **トモグラフィー**



医療分野の CT (Computer Tomography)

2. 深部仮想コンプトン散乱と一般化パートン分布



深部非弾性散乱のkinematics

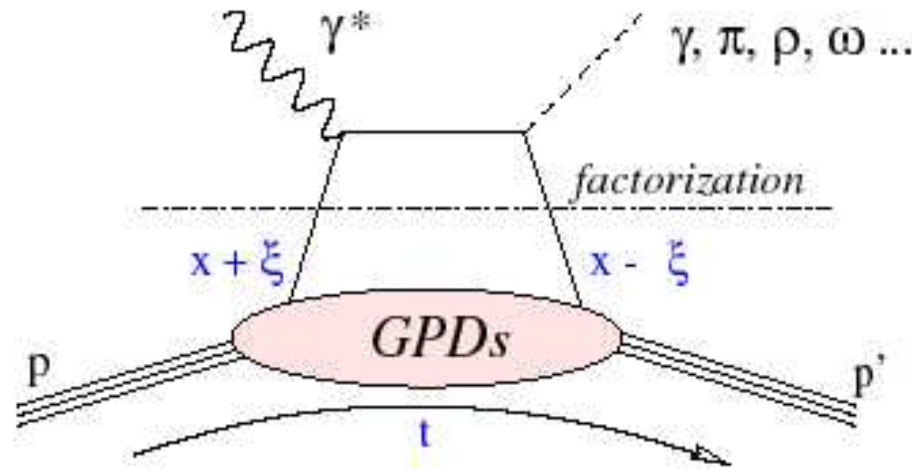
$$Q^2 \equiv -q^2 \longrightarrow \infty, \quad P \cdot q \longrightarrow \infty, \quad \frac{Q^2}{P \cdot q} = \text{有限}$$

DIS processes



摂動論的QCDが適用可能

Bjorken極限で支配的なDVCS散乱振幅

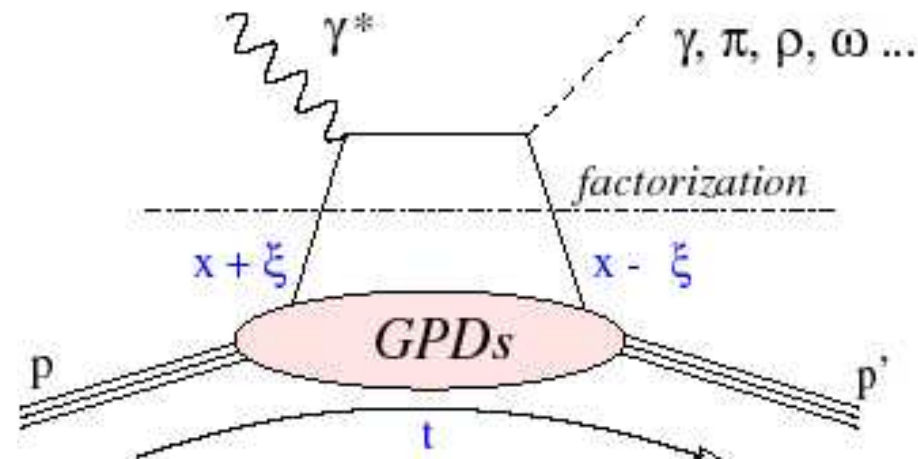


Handbag Diagram

ダイアグラムの下半分の部分に含まれる非摂動論的核子構造の情報を与えるのが3個の力学変数に依存する4個のGPDFである。

$$\begin{aligned} H(x, \xi, t), & \quad E(x, \xi, t) \\ \tilde{H}(x, \xi, t), & \quad \tilde{E}(x, \xi, t) \end{aligned}$$

Bjorken極限で支配的なDVCS散乱振幅



Handbag Diagram

3個の力学変数

$t = (P' - P)^2$: 核子の4元運動量移行

x : Broken 変数

始状態と終状態の核子中で反応に関与するパートンの
Longitudinal momentum fraction の平均

ξ : Skewdness パラメター

始状態と終状態の longitudinal momentum fraction の差
(~ 核子の運動量移行の縦方向成分)

[補足] Inclusive scattering と DVCS の関係

$$d\sigma_{\text{inclusive}} \propto \sum_f \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} \right|^2 \propto \text{Im} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} \right]$$

$$d\sigma_{\text{DVCS}} \propto \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \end{array} \right|^2$$

The diagrams illustrate the relationship between inclusive scattering and DVCS. Diagram 1 shows a quark line with momentum k and a photon with momentum q interacting via a hard vertex. Diagram 2 shows a quark line with momentum k and a photon with momentum q interacting via a hard vertex, with the imaginary part of the amplitude. Diagram 3 shows a quark line with momentum k and a photon with momentum q interacting via a hard vertex, with the generalized parton distribution (GPDF) and the final state momentum $P' = P + \Delta$.

PDF と GPDF の関係 (場の理論的考察)

通常の PDF

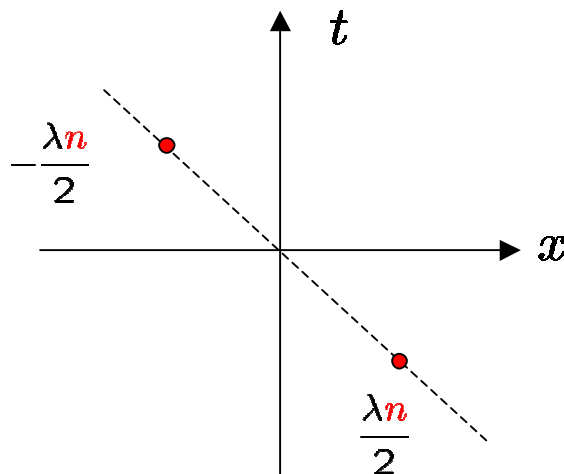
$$q(x) = \langle P | O(x) | P \rangle, \quad |P\rangle : \text{運動量 } P \text{ の核子状態}$$

Light-cone 演算子

$$O(x) = \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda x} \bar{\psi} \left(-\frac{\lambda \boldsymbol{n}}{2} \right) \not{n} \mathcal{L} \psi \left(\frac{\lambda \boldsymbol{n}}{2} \right)$$

$\mathcal{L}$: gauge link

$\boldsymbol{n} \propto (1, 0, 0, -1)$: light-like vector



PDF



核子中のクォーク・クォーク光円錐相関

Light-cone 演算子 $O(x)$ は twist-2 の局所演算子のタワーと等価

$$\begin{aligned}
 O^{\mu_1} &= \bar{\psi} \gamma^{\mu_1} \psi && \leftarrow \text{クォークの運ぶ電磁流} \\
 O^{\{\mu_1, \mu_2\}} &= \bar{\psi} \gamma^{(\mu_1} i D^{\mu_2)} \psi && \leftarrow \text{QCD のエネルギー・運動量} \\
 O^{\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}} &= \bar{\psi} \gamma^{(\mu_1} i D^{\mu_2} i D^{\mu_3)} \psi && \text{テンソルのクォーク部分} \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

同一運動量の核子状態行列要素

$$\langle P | O^{\{\mu_1, \dots, \mu_n\}} | P \rangle = a_n \cdot 2 P^{\mu_1} \dots P^{\mu_n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

摂動論的 QCD では計算できない！

クォーク分布関数 (PDF)

$$\int_{-1}^1 dx x^{n-1} q(x) = a_n$$

同じ twist-2 演算子の異なる運動量の核子間行列要素

($\xi \neq 0$ の一般の場合は表式が複雑になるので以下 $\xi = 0$ の場合に限定)

$$\begin{aligned}\langle P'|O^{\mu_1}|P\rangle &= A_{10}(t) \cdot \bar{U}(P') \gamma^{\mu_1} U(P) \\ &+ B_{10}(t) \cdot \frac{i}{2M} \bar{U}(P') \sigma^{\mu_1\alpha} \Delta_\alpha U(P) \\ \langle P'|O^{\{\mu_1,\mu_2\}}|P\rangle &= A_{20}(t) \cdot \bar{P}^{\{\mu_1} \bar{U}(P') \gamma^{\mu_2\}} U(P) \\ &+ B_{20}(t) \cdot \frac{i}{2M} \bar{P}^{\{\mu_1} \bar{U}(P') \sigma^{\mu_2\}\alpha} \Delta_\alpha U(P) \\ &+ C_{20}(t) \cdot \frac{1}{M} \Delta^{\{\mu_1} \Delta^{\mu_2\}} \\ &\dots\end{aligned}$$

ここで

$$\Delta = P' - P, \quad \bar{P} = \frac{1}{2}(P' + P)$$

特に

$$A_{10}(t) = F_1(t) \quad : \quad \text{Dirac F.F.}$$

$$B_{10}(t) = F_2(t) \quad : \quad \text{Pauli F.F.}$$

この理由で

$$A_{n0}(t), B_{n0}(t), C_{n0}(t) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

は **generalized form factor** と呼ばれる。

一般化クォーク分布 ($\xi = 0$ のもの) は、以下の式で定義される。

$$\begin{aligned} \int dx x^{n-1} H(x, 0, t) &= A_{n0}(t) \\ \int dx x^{n-1} E(x, 0, t) &= B_{n0}(t) \end{aligned}$$

明らかに

$$A_{n0}(t=0) = a_n$$

だから

$$H(x, 0, 0) = q(x)$$

すなわち $H(x, \xi, t)$ の前方極限 ($P' \longrightarrow P$, or $t \longrightarrow 0, \xi \longrightarrow 0$)
は通常の前偏極分布関数 $q(x)$ に帰着

一方 $E(x, \xi, t)$ の前方極限

$$E(x, 0, 0) \equiv e(x)$$

は通常の包括深部非弾性散乱には現れない全く新しい PDF を与える。

実は、この新しい PDF は QCD のエネルギー・運動量テンソルで定義されるクォークの全角運動量分布関数 $J^q(x)$ と以下の著しい関係を有することが示せる。

$$J^q(x) = \frac{1}{2} x [q(x) + e^q(x)] \quad : \text{ Ji の角運動量和則}$$

クォークのヘリシティ分布 $\Delta q(x)$ は既に測定済みだから $J^q(x)$ がわかれば

$$L^q(x) = J^q(x) - \frac{1}{2} \Delta q(x)$$

により核子中のクォークの軌道角運動量分布も純粋に実験的に決められる！

[Ji の和則が生じる理由]

QCD のエネルギー・運動量テンソルを含む角運動量演算子の定義

$$J^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \int d^3x M^{0jk}$$

ここで

$$M^{\alpha\mu\nu} = T^{\alpha\nu} x^\mu - T^{\alpha\mu} x^\nu$$

Key Observation

$$T_q^{\mu\nu} = \bar{\psi} \gamma^{(\mu} i D^{\nu)} \psi = O\{\mu, \nu\}$$

QCD のエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ のクォーク部分 $T_q^{\mu\nu}$ は
PDF, GPDF の定義に現れた twist-2 演算子 $O\{\mu, \nu\}$ そのもの

これより

$$\begin{aligned} J_q &= \langle P \uparrow | \int d^3x (\mathbf{x} \times \mathbf{T})^z | P \uparrow \rangle \\ &= \frac{1}{2} [A_{20}(0) + B_{20}(0)] \end{aligned}$$

またこれを一般化して次の関係式が証明できる。

$$\begin{aligned} J_{qn} &= \frac{1}{2} [A_{n+1,0}(0) + B_{n+1,0}(0)] \\ &= \frac{1}{2} [H_{n+1}(0) + E_{n+1}(0)] \end{aligned}$$

これは分布関数の関係式に焼き直すと

$$J_q(x) = \frac{1}{2} x [q(x) + e_q(x)]$$

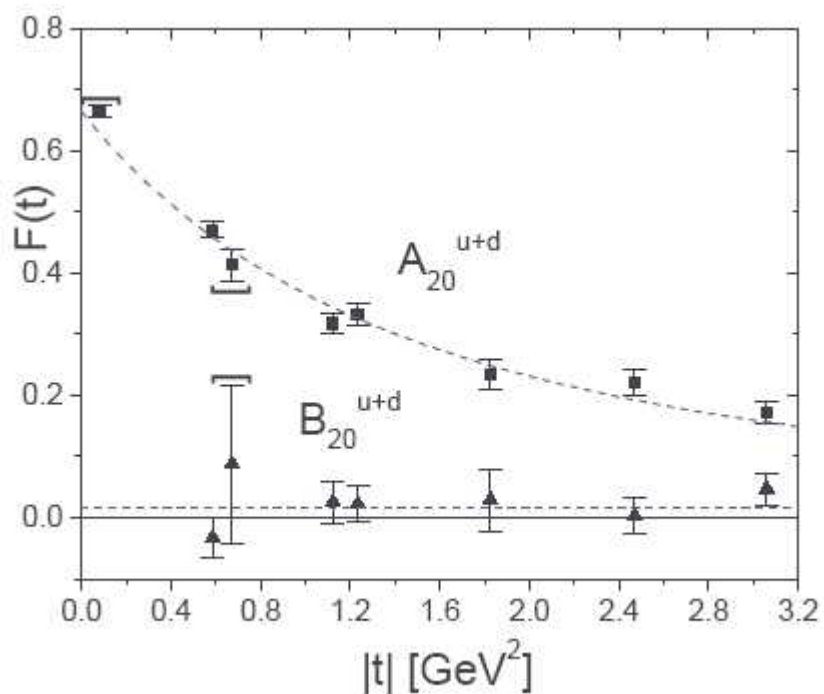
Ji の角運動量和則

Generalized form factor (moments) に対する最近の Lattice 計算

Ph. Haegler et al. , P.R. D68 (2003) 034505

J.W. Negele et al. , N.P. B128 (2004) 170

Unquenched simulation in “heavy pion world”



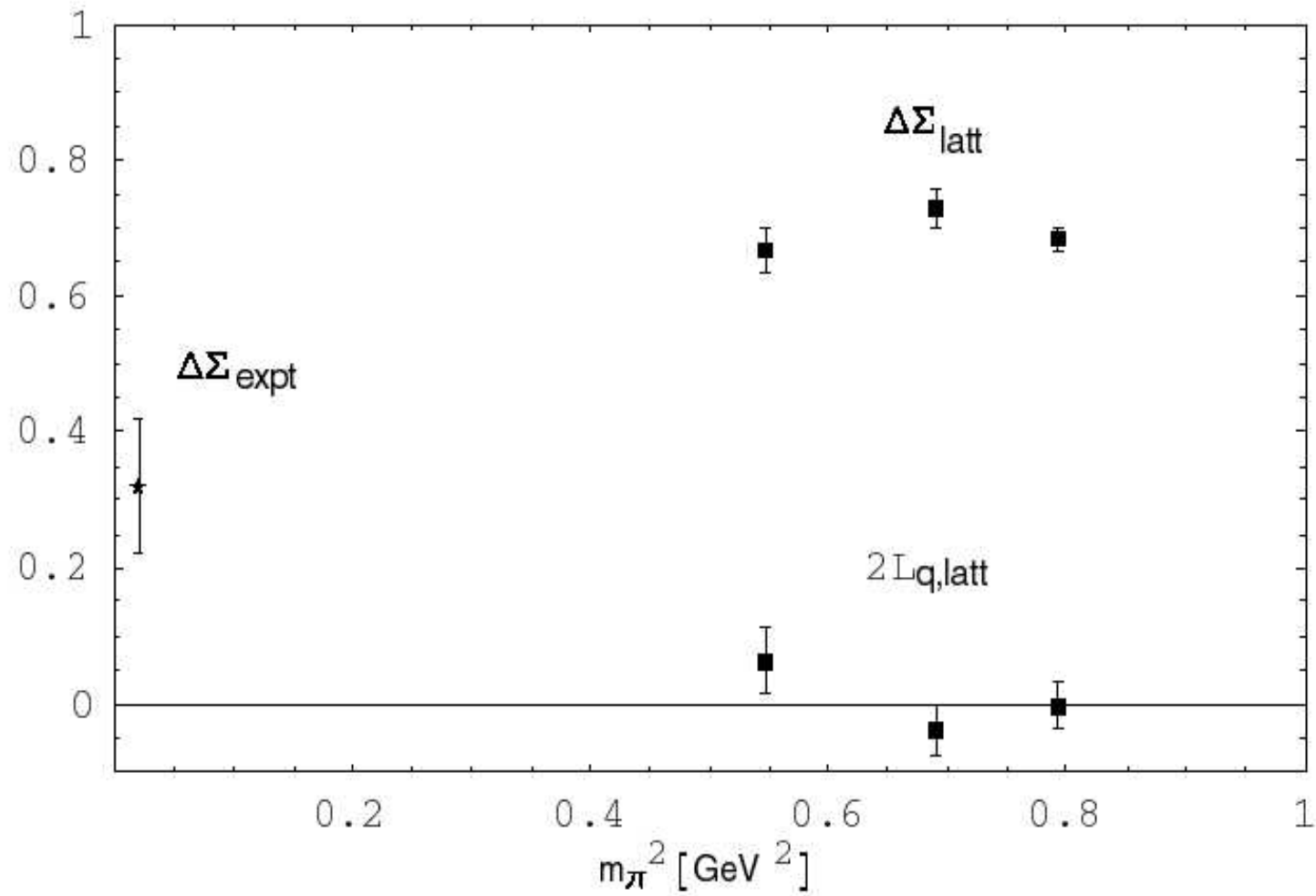
$$\kappa = 0.1570, 1565, 1560$$



$$m_\pi = 744, 831, 897 \text{ MeV}$$

$$J_q = \frac{1}{2} \left[A_{20}^{u+d}(0) + B_{20}^{u+d}(0) \right]$$

$$L_q = J_q - \frac{1}{2} \Delta \Sigma$$



Negele らの Lattice 計算 の答え

m_π	744 (MeV)
$\Delta\Sigma$	0.67 ± 0.04
$2L_q$	0.06 ± 0.05
$2J_q$	0.73 ± 0.04

far from real world (= **chiral regime**) !



核子スピン・コンテンツに対する CQSMの予言

	quark	antiquark	total
$\Delta\Sigma$	0.40	- 0.05	0.35
$2L_q$	0.46	0.19	0.65
$2J_q$	0.86	0.14	1.00

CQSM における GPDF の前方極限とクォーク軌道角運動量分布

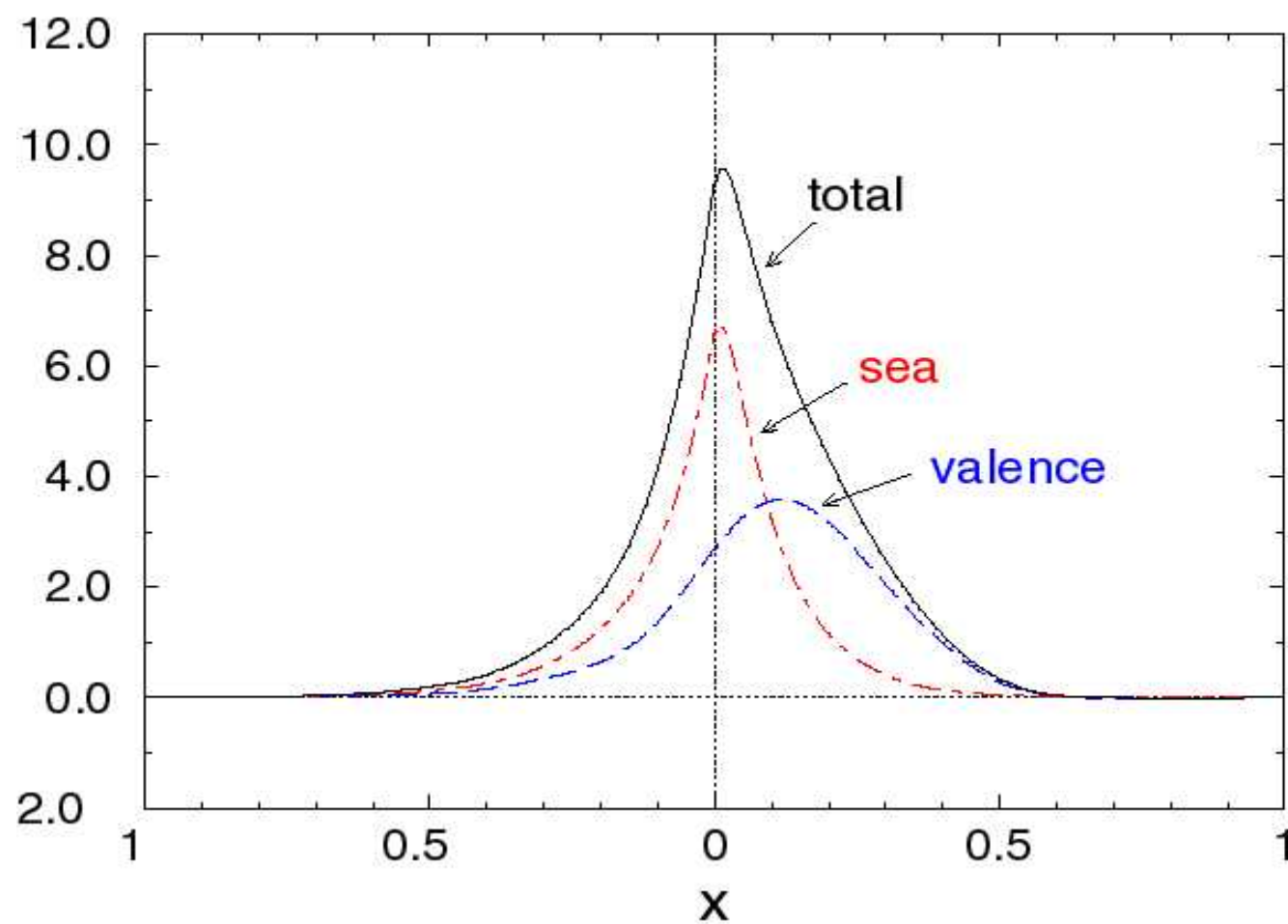
$$\begin{aligned} J^{u+d}(x) &= \frac{1}{2} x [q^{(I=0)}(x) + e^{(I=0)}(x)] \\ J^{u-d}(x) &= \frac{1}{2} x [q^{(I=1)}(x) + e^{(I=1)}(x)] \end{aligned}$$

模型は以下の関係式を満たす。

$$\begin{aligned} \int q^{(I=0)}(x) dx &= 3 & (3 = N_u + N_d) \\ \int q^{(I=1)}(x) dx &= 1 & (1 = N_u - N_d) \\ \int e^{(I=0)}(x) dx &= 3 \kappa_S & (\kappa_S = \kappa_P + \kappa_n) \\ \int e^{(I=1)}(x) dx &= \kappa_V & (\kappa_V = \kappa_P - \kappa_n) \end{aligned}$$

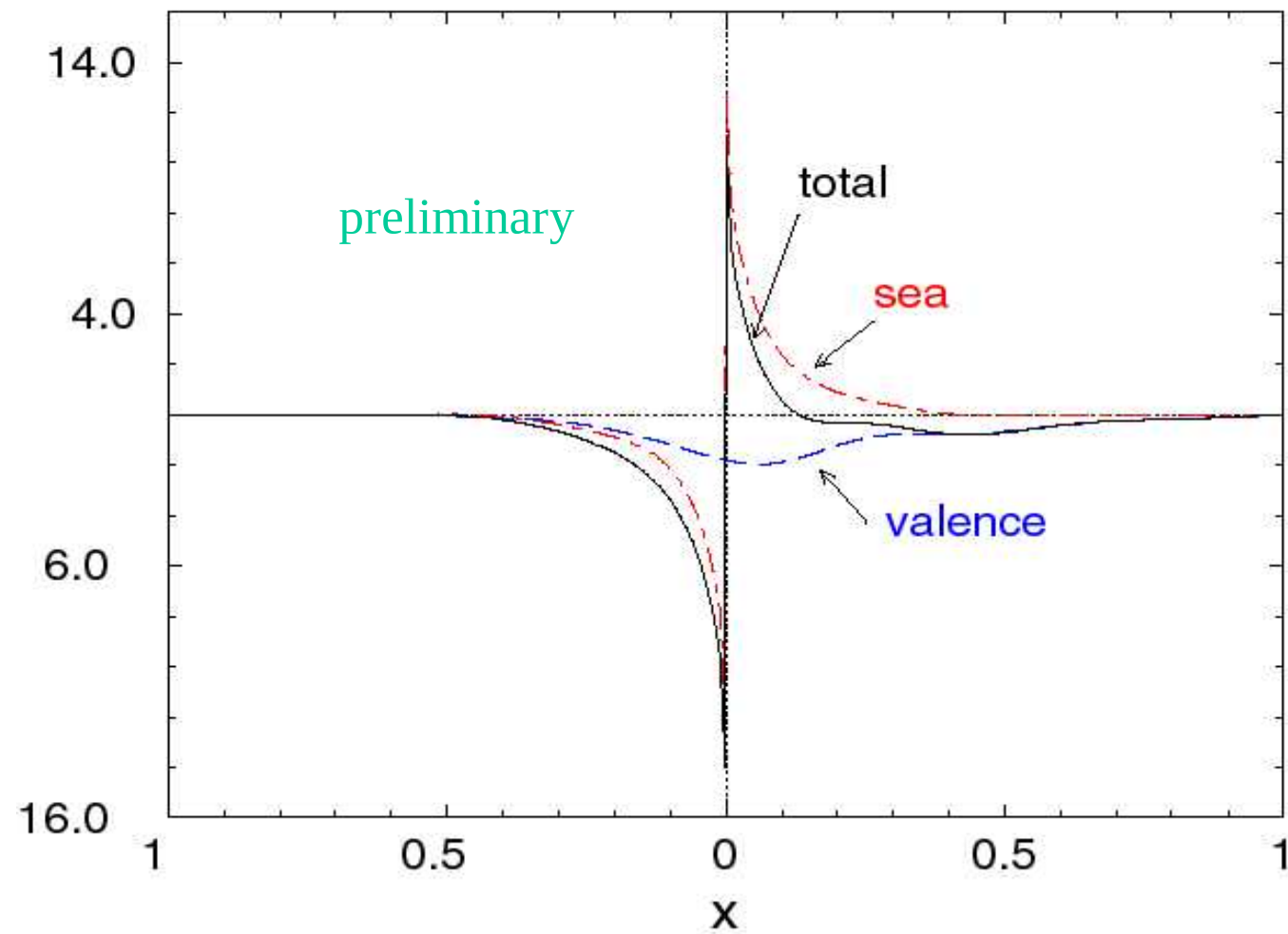
$e(x)$: 核子の異常磁気能率の Feynman 運動量空間の分布

Isovector $e(x)$



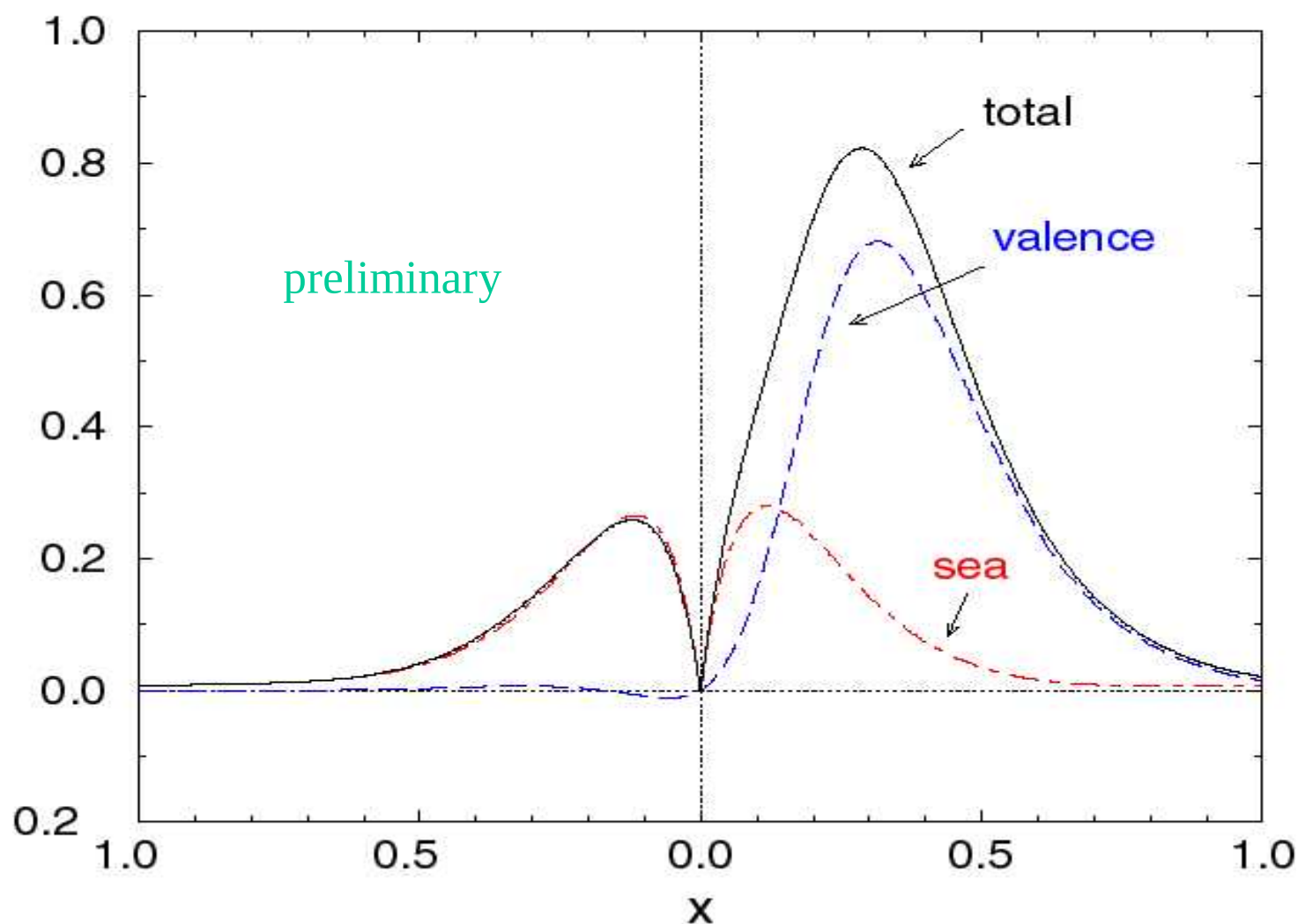
和則 : $\int e^{(I=1)}(x) dx = \kappa_p - \kappa_n = \text{large}$

Isoscalar $e(x)$



和則 : $\int e^{(I=0)}(x) dx = \kappa_p + \kappa_n = \text{small}$

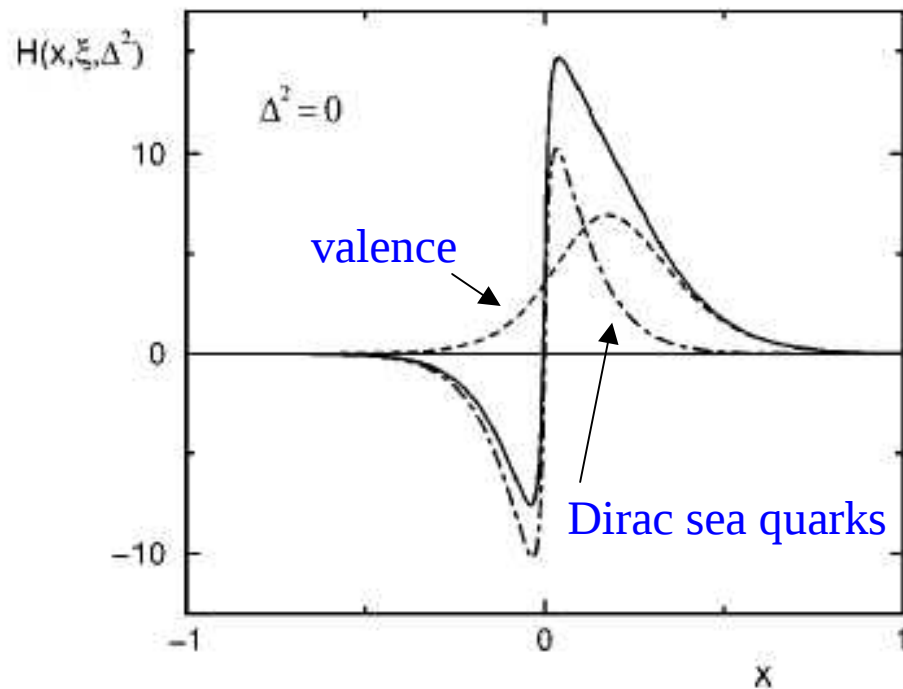
Isoscalar J(x)



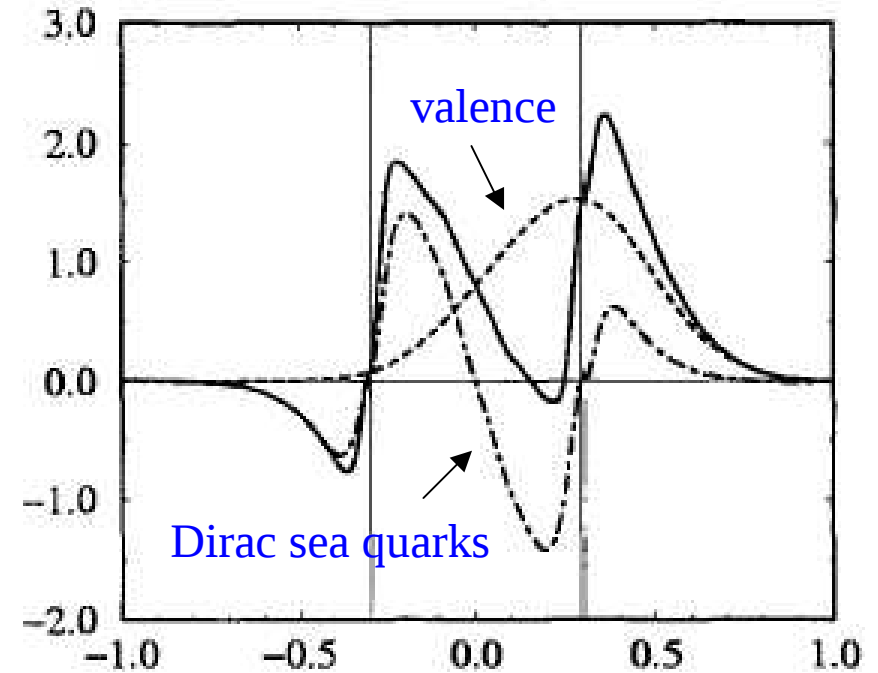
和則 :
$$\int J^{(I=0)}(x) dx = \int x \left[q^{(I=0)}(x) + e^{(I=0)}(x) \right] dx = \frac{1}{2}$$

$H(x, \xi, t)$ に対する CQSM の予言 (V.Yu. Petrov et. al.)

$\xi = 0$



$-\xi$ $\xi = 0.3$



$x > 0$: quark
 $x < 0$: antiquark

$x > \xi$: quark
 $-\xi < x < \xi$: **quark-antiquark pair**
 $x < 0$: antiquark

3. 核子構造に対する位相空間トモグラフィー

A.V. Belitsky, X.Ji, and F. Yuan, Phys. Rev. D69 (2004) 074014

Wigner 分布 $W(\mathbf{r}, \mathbf{p})$

位相空間の古典的確率密度分布 $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ の量子力学版

1次元空間の量子力学の場合

$$W(x, p) \equiv \int d\eta e^{ip\eta} \psi^*\left(x - \frac{\eta}{2}\right) \psi\left(x + \frac{\eta}{2}\right)$$

基本的な性質

- $\int W(x, p) dx = |\tilde{\psi}(p)|^2 \ (\geq 0) \quad :$ 運動量分布
- $\int W(x, p) dp = |\psi(x)|^2 \ (\geq 0) \quad :$ 座標空間の確率分布

任意の x, p に対しては

$W(x, p) :$ 必ずしも正定値ではない $\longleftrightarrow$ 量子力学系の非自明な位相の情報

核子中のクォークの量子力学的位相空間分布

Wigner 分布

$$W_{\Gamma}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}) \equiv \frac{1}{2M_N} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left\langle \frac{\boldsymbol{q}}{2} \left| \hat{\mathcal{W}}_{\Gamma}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}) \right| -\frac{\boldsymbol{q}}{2} \right\rangle$$

$$\hat{\mathcal{W}}_{\Gamma}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}) = \int d^4 \eta e^{ik \cdot \eta} \bar{\psi}(\boldsymbol{r} - \frac{\eta}{2}) \Gamma \psi(\boldsymbol{r} + \frac{\eta}{2})$$

ここで

$\boldsymbol{r}$: クォークの位置座標

$\boldsymbol{k}$: クォークの光円錐的距離 η に共役な4元運動量

$$\boldsymbol{k} = (k_0, \boldsymbol{k}_{\perp}, k_3) = (k_{-}, \boldsymbol{k}_{\perp}, k_{+}), \quad k_{\pm} = (k_0 \pm k_3)/\sqrt{2}$$

Reduced Wigner 分布

$$W_{\Gamma}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}) \equiv \int \frac{dk^{-}}{(2\pi)^2} W_{\Gamma}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k})$$

以下で議論される全ての情報を含む “mother” 分布

Mother 分布から得られるいくつかの興味深い分布

量子力学的位相空間分布

$$f_{\Gamma}(\boldsymbol{r}, x) \equiv \int \frac{d^2 k_{\perp}^2}{(2\pi)^2} W_{\Gamma}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k})|_{k^+=xp^+}$$

Feynman momentum x 、クォークの位置座標 $\boldsymbol{r}$ の関数



核子の静止系において、与えられた Feynman momentum x を持つクォークの3次元分布 (3次元像) を与える量。



$f_{\Gamma}(\boldsymbol{r}, x)$ は GPDF $F_{\Gamma}(x, \xi, t)$ と Fourier 変換で関係する。



$$f_{\Gamma}(\boldsymbol{r}, x) = \frac{1}{2M_N} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{-i \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{r}} F_{\Gamma}(x, \xi, t)$$

ただし

$$\xi = \frac{\Delta_3}{2E_q}, \quad t = -\Delta^2 \quad (\text{kinematics of Breit frame})$$

GPDF の完全な情報が得られれば、Feynman 運動量 x 毎に、

核子中クォークの 3 次元像

が再構成できる。



核子構造に対する量子力学的位相空間トモグラフィー

Cf.

医療分野における CT (Computer Tomography)

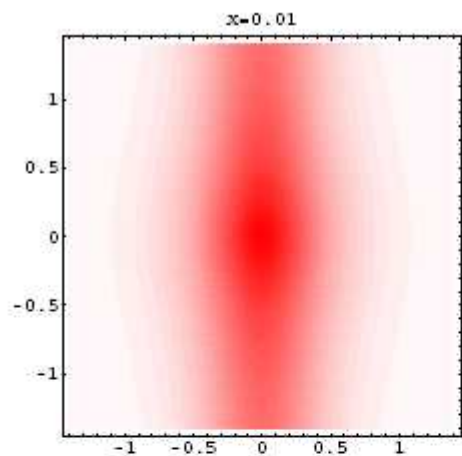
[例] phase space charge distribution

$$\rho_+^q(\boldsymbol{r}, x) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} H^q(x, \xi, t)$$

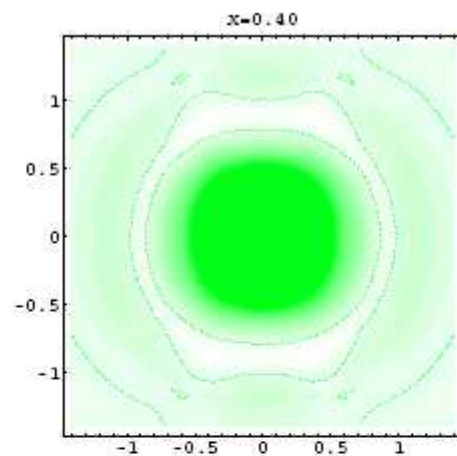
を以下の制限を満たすように適当にパラメトライズした GPDF を用いて構成

- (1) 1次のモーメントが核子の電磁形状因子を再現
- (2) 前方極限が通常の Feynman PDF を再現
- (3) x-moments の多項式制限
- (4) 正值性

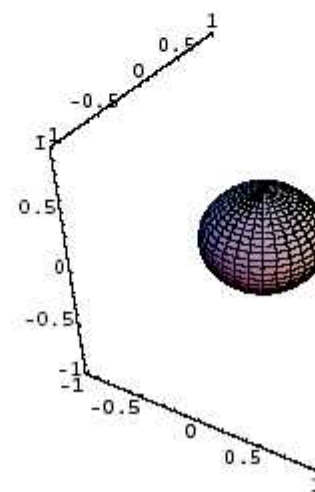
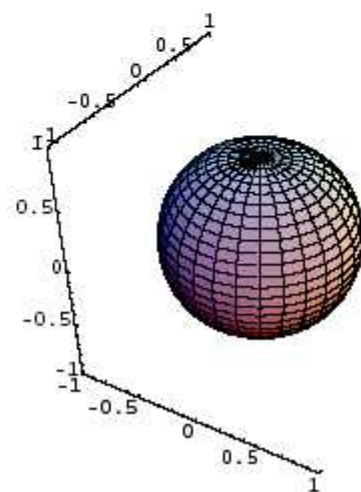
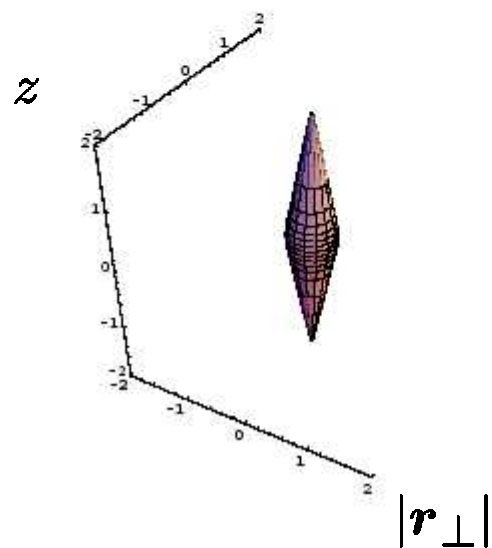
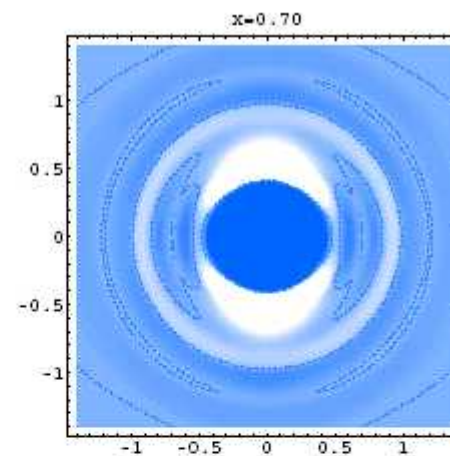
$x = 0.01$



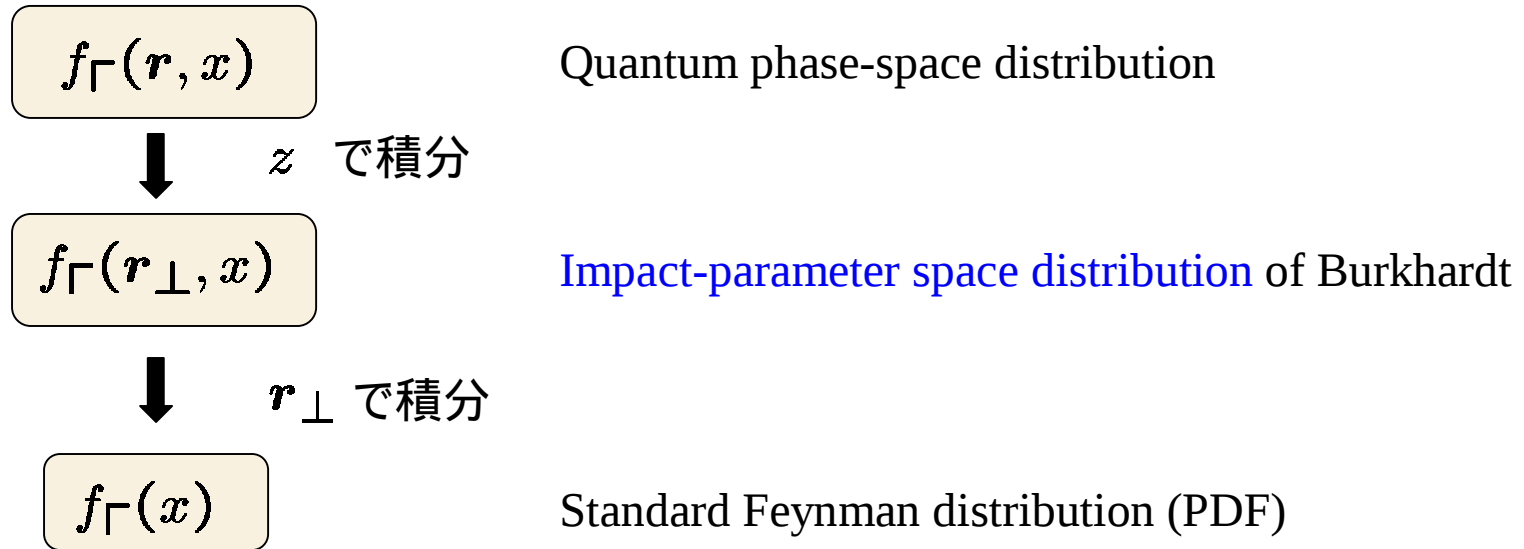
$x = 0.40$



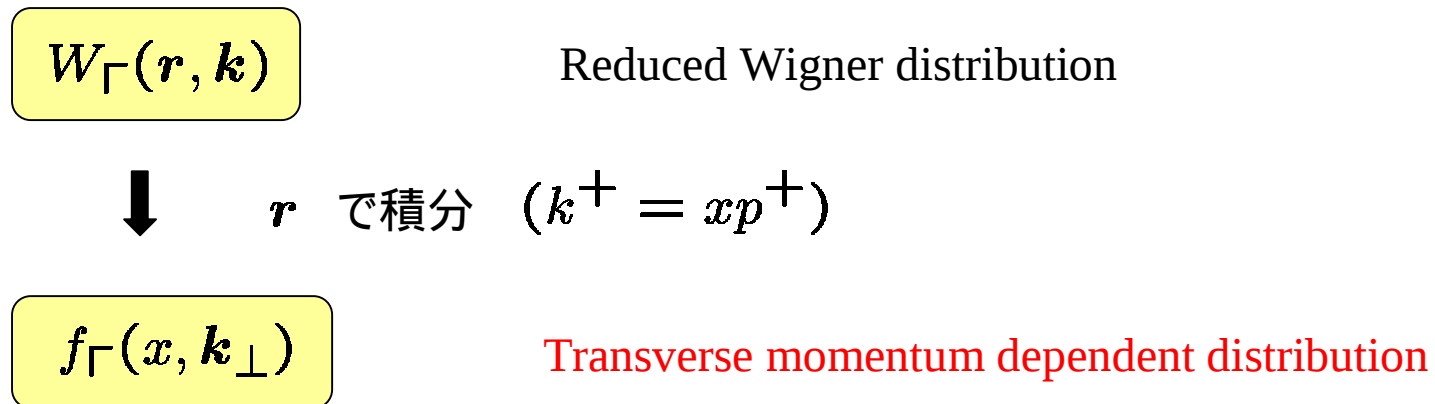
$x = 0.70$



Further reduction of phase-space distribution



一方



4. 終わりに

1956 陽子の 形状因子 の測定、

R. Hofstadter (1961年にノーベル賞)

1968-1972 MIT-SLAC 共同研究

Bjorken スケーリング、Feynman パarton模型、

パートン分布関数

Kendal, Friedman, Taylor (1990年にノーベル賞)

1990年代後半 ~

一般化パートン分布

実験的にも理論的にもほとんど未開の分野が出現！

核子スピンの謎を解くための最も強力な手段

核子のクォーク・グルオン構造の最も詳しい情報

完全解明には長期戦の覚悟が必要